Synthèse :

Nous venons de construire une fonction qui vérifie :

1. $P(0) = 10\,000$
2. $P(t+1) = 2.P(t)$
3. $\frac{P(t+\Delta t)}{P(t)} = \text{constante}$

Nous obtenons la fonction $P(t) = 10\,000\ .\ 2^t$

Attention ! : Il existe d'autres modèles de croissance. On peut construire un modèle non exponentiel continu et dérivable de croissance qui vérifie l'énoncé.
Mais ! : La fonction qui vérifie cet énoncé et que nous étudierons cette année est appelée une fonction exponentielle.

Approche discrète des fonctions exponentielles

Si une fonction f vérifie les conditions suivantes:

1. $\frac{f(x+\Delta x)}{f(x)} = \frac{f(\Delta x)}{f(0)}$,
2. $f(0) = C$,
3. $\frac{f(1)}{f(0)} = a$,

alors $f(x) = C.a^x$.

- Propriétés algébriques :

  Si C=1, on obtient la fonction $f(x) = a^x$
  $f(x) = a^x$ est appelée fonction exponentielle de base a.
  On note aussi : $a^x = \exp_a x$
  Cette fonction vérifie la propriété : $\exp_a(x_1+x_2) = \exp_a(x_1).\ \exp_a(x_2)$

- La réciproque de $f(x) = a^x$ est appelée fonction logarithme de base a

  On la note $\log_a x$
  Cette fonction vérifie la propriété : $\log_a(x_1.x_2) = \log_a(x_1)+\log_a(x_2)$

Applications Questions de modélisation

1. Un détecteur à scintillations est utilisé pour mesurer la radioactivité d'un échantillon. L'activité d'un échantillon est évaluée par le nombre d'impulsions par minute que reçoit le détecteur, ce qui est représenté dans le tableau ci-dessous

Temps t (jours)	0	30	60	90	120	150	180	210	240	270
Activité A(t) (impulsions/minute)	1000	896	802	719	644	577	517	463	414	370

S'agit-il d'une décroissance exponentielle ? Si oui, pourquoi ? Si non, pourquoi ? Si le modèle est modélisé par une fonction exponentielle, quelle est sa base, et quelle est cette fonction exponentielle ?

2. Le nombre de bactéries d'une culture passe de 5 000 à 15 000 en 10 heures. En supposant que le taux de croissance est directement proportionnel au nombre de bactéries présentes, trouvez une formule qui permette de calculer le nombre de bactéries de la culture au temps *t*. Quel est ce nombre après 20 heures? A quel moment ce nombre est-il de 50 000?

3. Calcule la valeur acquise d'un capital de 3000 € placé pendant 5 ans à intérêts composés dont le taux annuel est de 10%, la période de capitalisation étant de 1 an, puis de 1 mois, puis de 1 jour?

4. La population d'une ville varie d'une manière exponentielle. On sait qu'en 2010 elle était de 135 426 habitants et qu'en 2011, elle était de 137 229 habitants.
   a) Calcule une valeur approchée de la population prévue en 2020.
   b) Calcule une valeur approchée de la population en 1980, et en 1950.

Rappel sur les puissances

$\forall\ a,b \in R_0^+$	$\forall\ m,p \in Q$	$a^m.a^p = a^{m+p}$	$\frac{a^m}{a^p} = a^{m-p}$	$\left(a^m\right)^p = a^{m.p}$
		$\left(a.b\right)^m = a^m.b^m$	$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$	
		$a^0 = 1$		

Avant de continuer, nous devrions élargir la notion d'exposant pour donner un sens à la notion de puissance à exposant irrationnel.

Si nous voulons donner un sens à l'expression $3^{\sqrt{2}}$, nous avons

$$
\begin{array}{llll}
1 < \sqrt{2} < 2 & \Rightarrow\ 3^1 < 3^{\sqrt{2}} < 3^2 & \Leftrightarrow & 3 < 3^{\sqrt{2}} < 9 \\
1,4 < \sqrt{2} < 1,5 & \Rightarrow\ 3^{1,4} < 3^{\sqrt{2}} < 3^{1,5} & \Leftrightarrow & 4,65 < 3^{\sqrt{2}} < 5,19 \\
1,41 < \sqrt{2} < 1,42 & \Rightarrow\ 3^{1,41} < 3^{\sqrt{2}} < 3^{1,42} & \Leftrightarrow & 4,707 < 3^{\sqrt{2}} < 4,759 \\
\ldots & & \Leftrightarrow & \\
1,414213 < \sqrt{2} < 1,414214 & \Rightarrow\ 3^{1,414213} < 3^{\sqrt{2}} < 3^{1,414214} & \Leftrightarrow & 4,728801 < 3^{\sqrt{2}} < 4,728806
\end{array}
$$

Et la valeur de $3^{\sqrt{2}}$ se précise de plus en plus finement.

Définition :

Si r est un irrationnel : $\forall\ a \in R_0^+ :\ a^r = \lim_{q_i \to r} a^{q_i}$ avec $q_i \in Q$

On peut montrer que les propriétés rappelées pour les puissances à exposants rationnels s'étendent au cas des puissances à exposant réel

Nous pouvons maintenant donner une définition de la fonction exponentielle

Lorsque a est un réel strictement positif, distinct de 1, on définit la fonction $\exp_a$

$$\exp_a : R \to R_0^+ : x \to \exp_a(x) = a^x$$

Cette fonction obtenue est appelée fonction exponentielle de base a.

Exemples :

1. Dans un repère orthonormé, représente et compare les graphiques des fonctions :

$$y = 2^x \qquad y = \left(\frac{1}{2}\right)^x \qquad y = \log_2 x \qquad y = \log_{\frac{1}{2}} x$$